MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7

1 Dážďovka špirálová razí nový tunel: Najprv mieri 10 cm na sever, potom 11 cm na východ, potom 12 cm na juh, 13 cm na západ a tak ďalej (každý úsek je o 1 cm dlhší než predchádzajúci, smery opakuje podľa uvedeného vzoru).

Dážďovka súradnicová mapuje dielo svojej kolegyne: Začiatok tunela označí súradnicami $(0, 0)$, prvú odbočku súradnicami $(0, 10)$, druhú odbočku $(11, 10)$ a tak ďalej.

Určte súradnice konca úseku, ktorý má dĺžku 100 cm.

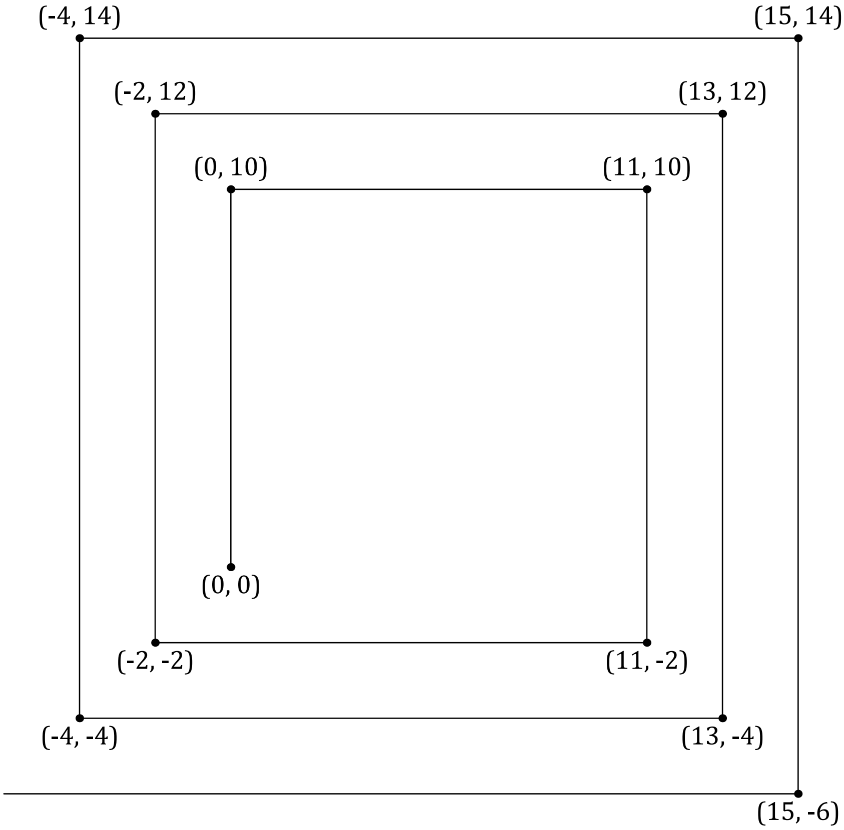
(Iveta Jančigová)

Riešenie:

Dĺžky úsekov (v centimetroch) pre jednotlivé smery sú:

smer	1. kolo	2. kolo	3. kolo	...	k. kolo
sever	10	14	18	...	$6 + 4k$
východ	11	15	19	...	$7 + 4k$
juh	12	16	20	...	$8 + 4k$
západ	13	17	21	...	$9 + 4k$

Úsek dlhý 100 cm razila dážďovka v 23. kole v južnom smere (lebo $8 + 4 \cdot 23 = 100$). Súradnice koncov týchto úsekov sú $(11, -2)$, $(13, -4)$, $(15, -6)$ a tak ďalej. Prvá súradnica sa postupne zväčšuje o 2, druhá sa zmenšuje o 2.



Všeobecne v k. kole sú súradnice konce úseku v južnom smere $(9+2k, -2k)$. Ak $k = 23$, tak dostávame $(55, -46)$, a to sú súradnice konca metrového úseku.

2 Súčin vekov všetkých detí pána Násobka je 1408. Vek najmladšieho dieťaťa je rovný polovici veku najstaršieho dieťaťa. Koľko detí má pán Násobok a koľko majú rokov?

(Libuše Hozová)

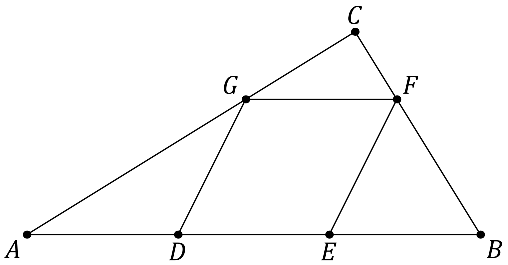
Riešenie:

Prvočíselný rozklad súčinu 1408 vekov detí je $2^7 \cdot 11$. Znamená to, že vek práve jedného dieťaťa je deliteľný prvočíslom 11. Keďže vek najstaršieho je dvojnásobok veku najmladšieho, nie je to ani jedno z nich. To znamená, že oba tieto veky sú mocninami prvočísla 2. Pritom vek najstaršieho musí byť viac než 11 a vek najmladšieho, čo je jeho polovica, musí byť menej než 11. Z toho dostávame, že najstaršie dieťa má 16 rokov a najmladšie 8. Súčin týchto dvoch vekov je $8 \cdot 16$ čiže 2^7, takže súčin vekov zvyšných detí je 11. Zvyšné dieťa je teda práve jedno a jeho vek je 11.

Zhrnutím dostávame, že pán Násobok má tri deti a ich veky sú 8, 11 a 16 rokov. Ľahko vidieť, že táto situácia spĺňa podmienky zadania.

---

3 Na stranách trojuholníka ABC sú dané body D, E, F, G (pozri obrázok). Pritom platí, že štvoruholník $DEFG$ je kosoštvorec a úsečky AD, DE a EB sú navzájom zhodné.

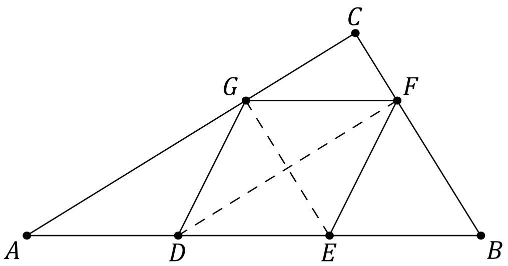


Určte veľkosť uhla ACB.

(Iveta Jančigová)

Riešenie 1:

Podľa predpokladov sú úsečky AD a GF rovnobežné a zhodné. Teda štvoruholník $ADFG$ je rovnobežník, a teda priamky AG a DF sú rovnobežné. Obdobnou úvahou je možné ukázať, že aj priamky BF a EG sú rovnobežné. Keďže uhlopriečky DF a EG kosoštvorca $DEFG$ sú kolmé, sú kolmé aj priamky AG a BF. Bod C je priesečníkom týchto priamok, teda uhol ACB je pravý.



Riešenie 2:

Keďže AD a DG sú zhodné, trojuholník ADG je rovnoramenný, a teda uhly DAG a DGA sú zhodné.

Analogicky je možné ukázať, že uhly EBF a EFB sú navzájom zhodné.

Z rovnobežnosti priamok DG a EF plynie, že uhly ADG a DEF sú súhlasné, a teda sú zhodné.

Analogicky uhly BEF a EDG sú navzájom zhodné.

Všimnime si, že platí:

- Zo súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku ADG dostávame $180^\circ = |\sphericalangle ADG| + |\sphericalangle DAG| + |\sphericalangle DGA| = |\sphericalangle ADG| + 2\,|\sphericalangle DAG| = |\sphericalangle ADG| + 2\,|\sphericalangle BAC|$.
- Zo súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku BEF dostávame $180^\circ = |\sphericalangle BEF| + |\sphericalangle EBF| + |\sphericalangle EFB| = |\sphericalangle BEF| + 2\,|\sphericalangle EBF| = |\sphericalangle BEF| + 2\,|\sphericalangle ABC|$.
- Keďže A, D a E ležia na priamke, platí $180^\circ = |\sphericalangle ADG| + |\sphericalangle EDG| = |\sphericalangle ADG| + |\sphericalangle BEF|$.

Sčítaním prvých dvoch rovností dostávame $2 \cdot 180^\circ = |\sphericalangle ADG| + |\sphericalangle BEF| + 2\,|\sphericalangle BAC| + 2\,|\sphericalangle ABC|$, po odčítaní tretej $180^\circ = 2\,|\sphericalangle BAC| + 2\,|\sphericalangle ABC|$, čiže $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ$. Zo súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku ABC už dostávame, že uhol ACB je pravý.

---

4 Jožko vymyslel nasledujúcu úlohu:

$$M + A + M + R + A + D + M + A + T + E + M + A + T + I + K + U = ?$$

Rôzne písmená nahradzoval rôznymi číslicami od 1 do 9 a zisťoval, čo vychádza.

a) Aký najväčší výsledok mohol Jožko dostať?

b) Mohol dostať výsledok 50? Ak áno, ako?

c) Mohol dostať výsledok 59? Ak áno, aké hodnoty mohol mať v takom prípade súčet $M + A + M$?

(Miroslava Farkas Smitková)

Riešenie:

V Jožkovej rovnici sa vyskytujú písmená A, D, E, I, K M, R, T, U. Je ich deväť, spolu teda vyčerpajú všetky cifry od 1 do 9.

Keď pravú stranu Jožkovej rovnice označíme x, môžeme ju prepísať takto:

$$(A + D + E + I + K + M + R + T + U) + (3M + 3A + T) = x,$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + (3M + 3A + T) = x,$$

$$45 + 3M + 3A + T = x.$$

a) Ak má byť súčet najväčší možný, musíme najpočetnejšie písmená nahradzovať čo najväčšími číslicami. Máme teda $M = 9$, $A = 8$ (alebo naopak) a $T = 7$, z čoho $x = 45 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 7 = 103$.

b) Súčet 50 nie je možný, lebo nahradenie s najmenším možným súčtom je $M = 1$, $A = 2$ (alebo naopak) a $T = 3$, a to dáva $x = 45 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 = 57$.

c) Ak má platiť $x = 59$, musí platiť $3M + 3A + T = 14$ čiže $3(M + A) = 14 - T$. Nahradenie za T musí byť také, aby rozdiel $14 - T$ bol deliteľný tromi, takže T je 2, 5 alebo 8. Máme teda nasledujúce tri možnosti:

- Nech $T = 2$.

  Potom $M + A = 4$, takže môže byť buď $M = 1$ a $A = 3$, alebo $M = 3$ a $A = 1$. (Zvyšné písmená nahradíme zvyšnými číslicami v ľubovoľnom poradí.) Hľadaný súčet $M + A + M$ je tak buď 5, alebo 7.
- Nech $T = 5$.

  Potom $M + A = 3$, takže môže byť buď $M = 1$ a $A = 2$, alebo $M = 2$ a $A = 1$. (Zvyšné písmená nahradíme zvyšnými číslicami v ľubovoľnom poradí.) Hľadaný súčet $M + A + M$ je tak buď 4, alebo 5.
- Nech $T = 8$.

  Potom $M + A = 2$, pre túto hodnotu však nie je možné M a A nahradiť navzájom rôznymi číslicami.

Celkový súčet 59 teda je možný, čiastkový súčet $M + A + M$ môže byť 4, 5 alebo 7.

---

5 Jano vyrazil do sveta s batôžkom buchiet. Na prvom rázcestí stretol Dlhého, Širokého a Bystrozrakého a spravodlivo sa s nimi o svoje buchty rozdelil – každý dostal štvrtinu buchiet. Jano zo svojho dielu zjedol dve buchty a šiel ďalej. Na druhom rázcestí stretol Plavčíka a Vratka a aj s nimi sa spravodlivo rozdelil – každý dostal tretinu zvyšných buchiet. Jano zo svojho dielu zjedol zasa dve buchty a so zvyšnými vyrazil ďalej. Na treťom rázcestí stretol Snehulienku. Aj s tou sa spravodlivo rozdelil, takže obaja mali polovicu zvyšných buchiet. Keď Jano zjedol opäť svoje dve buchty, bol batôžtek prázdny, a tak sa vrátil domov. S koľkými buchtami vyrazil Jano do sveta?

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Úlohu môžeme riešiť odzadu:

- Na treťom rázcestí Jano zjedol posledné 2 buchty, čo bola polovica z toho, čo na toto rázcestie prieniesol. Na tretie rázcestie teda prišiel so 4 buchtami, a to je aj počet, s ktorým odchádzal z rázcestia druhého.
- Na druhom rázcestí zjedol 2 buchty (a potom vyrazil ďalej). Pred ním ich teda mal 6, čo bola tretina z toho, čo na toto rázcestie priniesol. Na druhé rázcestie teda prišiel s 18 buchtami, a to je aj počet, s ktorým odchádzal z rázcestia prvého.
- Na prvom rázcestí zjedol 2 buchty (a potom vyrazil ďalej). Pred ním ich teda mal 20, čo bola štvrtina z toho, čo na toto rázcestie prieniesol. Na prvé rázcestie teda prišiel s 80 buchtami, a to je aj počet, s ktorým odchádzal z domova.

Porovnaním so zadaním ľahko skontrolujeme, že tento počet naozaj vyhovuje. Jano teda vyrazil do sveta s 80 buchtami.

---

6 Pán Chrt mal vo svojom záprahu päť psov – Alíka, Broka, Muka, Rafa a Punťa. Koľkými spôsobmi ich mohol zapriahnuť do radu za sebou tak, aby bol Alík pred Punťom?

(Libuše Hozová)

Riešenie 1:

- Ak by bol Alík prvý, Punťo by mohol byť druhý, tretí, štvrtý alebo piaty, čo sú 4 možnosti.
- Ak by bol Alík druhý, Punťo by mohol byť tretí, štvrtý alebo piaty, čo sú 3 možnosti.
- Ak by bol Alík tretí, Punťo by mohol byť štvrtý alebo piaty, čo sú 2 možnosti.
- Ak by bol Alík štvrtý, Punťo by mohol byť len piaty, čo je 1 možnosť.
- Ak by bol Alík piaty, Punťo by už nemal kde byť. Tu máme 0 možností.

Pán Chrt mal teda $4 + 3 + 2 + 1 + 0$ čiže 10 možností, ako zapriahnuť Alíka a Punťa požadovaným spôsobom. V každom z týchto prípadov mohli byť zvyšní traja psi zapriahnutí na tri neobsadené miesta ľubovoľne, čo je možné urobiť vo všetkých prípadoch 6 spôsobmi: Brok môže ísť na ktorékoľvek z troch voľných miest, Muk na ktorékoľvek z dvoch zostávajúcich miest a Raf nemá na výber a musí obsadiť posledné voľné miesto.

Pán Chrt mohol svojich psov zapriahnuť celkovo $10 \cdot 6$ čiže 60 spôsobmi.

Riešenie 2:

Všetkých možných usporiadaní je $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ čiže 120 (na prvé miesto môžeme dať ktoréhokoľvek z 5 psov, na ďalšie už len ktoréhokoľvek zo zvyšných 4 psov a tak ďalej). Pritom každému usporiadaniu psov, kde Alík stojí pred Punťom, zodpovedá práve jedno usporiadanie, kde sú ostatní psi na rovnakých miestach, ale Alík a Punťo se vymenili. Takže Alík stojí pred Punťom presne v polovici všetkých usporiadaní, t. j. v 60.